

LE CAS ESSENTIELLEMENT GÉODÉSIQUE DANS LES ÉQUATIONS
DE HAMILTON - JACOBI INTÉGRABLES PAR
SÉPARATION DES VARIABLES.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der

Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Caleb Gattegno

aus **Alexandrien (Aegypten)**

Kairo, 1938

Imprimerie de la R. E. M. S. E. N.

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen
Fakultät auf Antrag der

Herren Professoren : A. Ostrowski, W. Matthies

Basel, den 6 Juli 1937

Prof. Dr. Hans Zickendraht.

Dekan.

ERRATA

p. 1 dans la formule lire $K - U = h_o$ au lieu de $= 2h_o$

p. 1 ligne 10 lire $\alpha^{(rs)}$ au lieu de $\alpha^{(rs)}$

p. 2 dans la note lire Differentialgleichung au lieu de differentialgleichung

p. 3 ligne 10 lire potentiel au lieu de potentiet

p. 5 dernière ligne, après le mot conditions ajouter (celles données en (5) à la page suivante)

p. 7 dans la note ligne 1, lire Wissenschaften au lieu de Wissenschafte.

ligne 2, lire p.649 au lieu de p 196

p. 9 ligne 1, lire p_r^2 au lieu de q_r^2

p. 16 3^{ème} ligne de la note, dans l'espace blanc introduire le nombre 649

p. 22 ligne 3 lire 9 — la condition est nécessaire au lieu de 6. — la condition est nécessaire.

p. 29 ligne 7, après sont nuls ajouter sauf Q_{mm} .

p. 33 ligne 2, deuxième formule (31) lire

$$\frac{\partial a^{(\gamma\gamma_1)}}{\partial q_{\gamma_2}} = a^{(\gamma_2\gamma_1)} Q_{\gamma_2\gamma} + a^{(\gamma_2\gamma)} Q_{\gamma_2\gamma_2}$$

ERRATA

En 1. dans la formule $\mu = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$ au lieu de $\frac{1}{2}$

En 1. ligne 10 lire $\frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{1}{4}$

En 2. dans la note les fonctions au lieu de fonctionnelles

En 3. dans la note l'expression au lieu de l'expression

En 4. dernière ligne après le mot conditions ajouter les données en

1. 2. à la page suivante

En 5. dans la note lire les fonctions au lieu de fonctionnelles

Page 2. lire 1.119 au lieu de 1.118

En 6. ligne 1 lire $\frac{1}{2}$ au lieu de $\frac{1}{4}$

En 7. dans la note lire l'expression au lieu de l'expression

En 8. ligne 2 lire la condition au lieu de la



condition au lieu de condition

En 9. ligne 3 après les conditions ajouter les

En 10. dans la dernière formule lire $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{1}{\epsilon}} + \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{1}{\epsilon}}$$

**LE CAS ESSENTIELLEMENT GÉODÉSIQUE DANS LES ÉQUATIONS
DE HAMILTON - JACOBI INTÉGRABLES PAR
SÉPARATION DES VARIABLES.**

A MA FEMME



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546701_0078

INTRODUCTION

La recherche des équations de Hamilton - Jacobi intégrables par séparation des variables, a repris de l'importance sous l'impulsion des théories quantiques et de leur application à la structure de l'atome. Nous appellerons, dans le courant de notre travail, ces équations : *équations séparables*.

On s'est borné, généralement, dans ces recherches, aux équations de la forme :

$$K - U \equiv \sum_{r,s=1}^n a^{(r,s)} p_r p_s - U(q_1, q_2, \dots, q_n) = 2 h_0$$

où les $a^{(r,s)}$ sont des fonctions des q_r et h_0 une constante arbitraire. K est naturellement une forme quadratique, définie positive des p_r .⁽¹⁾

Le problème se réduit alors à la détermination des

(1) Cependant dans les recherches générales dont nous allons parler on n'a pas tenu compte de cette condition qui impose des restrictions aux fonctions " arbitraires " par lesquelles s'expriment les solutions générales, conditions qui restent encore à élucider.

deux fonctions K (énergie cinétique) et U (énergie potentielle) que l'on peut associer pour que $K-U = h_0$ soit séparable.

On a abordé le problème de deux côtés différents.

I. - *Staeckel* (2) a cherché à déterminer toutes les fonctions U auxquelles peut être associée une fonction K convenablement choisie de telle sorte que l'équation de Hamilton - Jacobi résultante soit séparable et il a pu résoudre complètement cette partie du problème. Une fonction potentielle de cette nature peut être exprimée au moyen de $n(n+1)$ fonctions arbitraires chacune d'une seule variable (celle désignée entre parenthèses)

$$\omega_{r,s}(q_r) \quad (r=1,\dots,n; s=0,1,\dots,n)$$

telles que le déterminant

$$\Delta = |\omega_{r,s}| \quad (r,s=1,\dots,n)$$

soit différent de zéro. On peut alors poser :

(2) *P. Staeckel* : " Ueber die Integration der Hamilton - Jacobischen differentialgleichung mittels Separation der Variablen " (Habilitationsschrift, Halle , a . S; 1891) , - & Mathematische Annalen Bd. 42 pp. 537-63

$$(1) \quad U = \frac{\sum \omega_{r,0} (q_r) \Delta_r}{\Delta}$$

où Δ_r représente le mineur de Δ correspondant à ω_{r1} et de plus à toute fonction de la forme (1) peut être associée une énergie cinétique de manière à rendre l'équation $K-U=b_0$ séparable.

II.- D'autre part Lévi-Civita (3) Burgatti (4) Dall'Acqua (5) ont abordé et résolu la question inverse, de trouver toutes les énergies cinétiques K auxquelles peut être associé un potentiel convenablement choisi de telle sorte que l'équation $K-U=b_0$ résultante soit séparable. Un tel potentiel sera désigné par la suite comme *potentiel séparable par rapport à K* .

Le résultat définitif dans cette direction a été obtenu par Dall'Acqua (5) et consiste en ce que les fonctions K cherchées se répartissent en $n+1$ types ; on obtient les formes K du type C_m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$), après une permutation convenable des indices, en partant du système d'équations

$$(2) \quad p_i = \sum_{r=1}^m \alpha^{(ri)}(q_i) c_r \quad (i = 1, \dots, n)$$

(3) T. Lévi-Civita : " Sulla integrazione della equazione di Hamilton Jacobi per separazione di variabili. " Math. Ann. Bd. 59. 1904

(4) P. Burgatti. " Determinazione dell'equazioni di Hamilton Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili " . Rend. della R. Acad. dei Lincei (Roma) vol XX, 1o. semestre 1911 pp108 - 9)

(5) Dall'Acqua. " Le equazione di Hamilton - Jacobi che si integrano per separazione di variabili " R. Circolo mat. di Palermo 1911. pp. 341 - 351

$$(3) \quad p_k = \sum_{r=1}^m a^{(r,k)}(q_k) c_r \pm \sqrt{\sum_{t,s=1}^m b^{(r,s,k)}(q_k) c_r c_s + \sum_{t=m+1}^n b^{(t,k)}(q_k) d_t} \\ (k = m+1, \dots, n)$$

où les fonctions a et b sont des fonctions arbitraires d'une seule variable (celle indiquée) et pour lesquelles les déterminants

$$A = | a^{(r,i)} | \quad B = | b^{(t,k)} |$$

sont différents de zéro, (6)

En résolvant (2) et (3) par rapport aux c_r et aux d_t et en les portant dans

$$(4) \quad K = \sum_{r=1}^m c_r^2 + \sum_{t=m+1}^n d_t$$

on arrive à l'expression générale cherchée de l'énergie cinétique.

Dall'Acqua obtient ses résultats, antérieurement devinés par Burgatti (4) en partant comme ce dernier, de formules

(6) Cependant la condition que ces déterminants soient différents de zéro pourrait peut-être introduire une restriction essentielle ; si l'on part d'une forme K donnée on parvient aux formules (2) et (3), mais la démonstration que dans ce cas les déterminants A et B sont différents de zéro n'a pas été donnée par Dall'Acqua. ce point reste encore à élucider.

importantes de Lévi-Civita qui donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour la séparabilité de $K-U=h_0$, sous forme d'équations aux dérivées partielles du second ordre très simples (ce sont les formules (I) du paragraphe I dans notre travail). Nous les appellerons : conditions de séparabilité de Lévi-Civita.

Pour chacune des deux solutions indiquées de notre problème, il reste évidemment à trouver, toutes les énergies cinétiques qu'on peut associer à un potentiel de la forme (1) de Staeckel et toutes les énergies potentielles qu'on peut associer à l'énergie cinétique (4) de Lévi-Civita - Dall'Acqua.

Sur ces questions il n'y a que des résultats bien spéciaux: Staeckel a montré (2) qu'on peut associer toujours à une fonction potentielle du type (1) une énergie cinétique formée par une somme de carrés et du type appelé aujourd'hui: *type de Staeckel* (c'est une généralisation de l'élément linéaire de Liouville).

Lévi-Civita montre de son côté, qu'on peut toujours associer à l'énergie cinétique K , satisfaisant à ses conditions, une

constante, pour potentiel séparable par rapport à K.

Quant aux problèmes généraux qui se posent ici ils n'ont pas encore été résolus,

Poursuivant la voie inaugurée par Lévi-Civita on s'est intéressé en particulier, au cas où la forme K de Lévi-Civita Dall'Acqua est telle qu'on ne puisse lui associer d'autre fonction potentielle qu'une constante. Alors les liaisons du système sont telles qu'il n'y a séparabilité que lorsque les forces extérieures manquent : on appelle ce cas: *le cas essentiellement géodésique* (Dall'Acqua).

Déjà Dall'Acqua s'était occupé de ce problème et avait montré que dans le cas essentiellement géodésique l'énergie cinétique est du type C_n. Ce type avait été étudié auparavant par Lévi-Civita qui partait des conditions :

$$(5) \quad \frac{\partial K}{\partial q_r} = \frac{\partial K}{\partial p_r} L_r \quad \text{où} \quad L_r = \sum_{s=1}^n Q_{rs} p_s \quad (r = 1, \dots, n)$$

Dall'Acqua a montré que les formules (5) sont nécessaires

et suffisantes pour l'existence de C_n . Nous les appellerons : *conditions de divisibilité de Lévi-Civita* et le cas C_n : *cas de Lévi-Civita*.

Les termes dans lesquels Dall'Acqua a énoncé le résultat que les conditions (5) sont nécessaires pour le cas essentiellement géodésique, manquent de précision et ont conduit à des interprétations erronées : on a cru que ces conditions étaient aussi suffisantes (7). Or, il suffit de considérer l'exemple suivant pour s'assurer du contraire; soit:

$$2K = \sum_{r=1}^n f_r^2(q_r) p_r^2,$$

cette fonction satisfait aux conditions de séparabilité et de divisibilité, pourtant on peut lui adjoindre pour potentiel séparable par rapport à K une somme de fonctions arbitraires chacune

(7) Voir par exemple: l'Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften IV,12,13 articles de Prange, en particulier p. 196; et l'ouvrage de Riemann-Weber: "Differenzial und Integralgleichungen der Physik" article de P. Frank note 1 de la page 40 de la 7ème édition (1927)

dépendant d'une seule variable $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Dans le présent travail nous recherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un problème dynamique à liaisons indépendantes du temps soit essentiellement géodésique et nous résolvons complètement, pour le cas de Lévi-Civita, le problème de la détermination de toutes les fonctions potentielles qu'on peut associer à une énergie cinétique qui rentre dans ce cas, de telle sorte que l'équation de Hamilton-Jacobi résultante soit séparable.

Le critère que nous trouvons est très simple et très maniable; pour le cas essentiellement géodésique on peut énoncer :

CRITERE : “ *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème dynamique à liaisons indépendantes du temps, soit essentiellement géodésique est qu'en plus des conditions (5), K remplisse la condition de ne contenir aucun coefficient de terme carré qui soit une fonction de la seule variable de l'indice correspondant ni soit constant.*” (C'est notre théorème II)

Appelons généralement *variable libre* une variable q_r telle

que le coefficient $\sigma^{(r)}$ de q_r^2 dans K soit ou constant ou fonction de q_r seulement. Alors notre critère ci-dessus découle du fait que le potentiel séparable par rapport à K ne peut contenir que les variables libres. Nous montrons ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un potentiel séparable par rapport à K dépendant d'un groupe de variables libres et les contenant toutes, est que la partie de K correspondant aux indices de ces variables se réduise à une somme de carrés. *Dans ce cas on peut prendre pour potentiel séparable par rapport à K une somme de fonctions arbitraires chacune ne dépendant que d'une seule des variables du groupe en question. En particulier tout potentiel qui est une fonction arbitraire d'une quelconque des variables libres est séparable par rapport à K . (C'est notre théorème III).*

Indiquons brièvement la disposition de notre mémoire. Le premier paragraphe est consacré aux formules de Lévi-Civita que nous rappelons sans démonstration.

Dans le second paragraphe, après avoir transformé les formules de Lévi-Civita en tenant compte de (5), nous démontrons un critère pour le cas essentiellement géodésique. critère qui porte sur les fonctions Q_{rs} qui entrent dans les L_r des formules (5).

Le paragraphe 3 est consacré au cas où il existe un potentiel séparable non constant; nous obtenons alors les deux theorèmes énoncés ci-dessus.

Monsieur Alexandre Ostrowski qui nous a introduit dans cette recherche, a posé le problème dont nous nous occupons ici dans un de ses cours de l'Université de Bâle du semestre d'hiver de 1936 - 37, Qu'il trouve ici l'expression de toute notre gratitude pour les précieux conseils qu'il nous a constamment prodigués.

I.— Les formules de Lévi-Civita.

I.— Soit

$$(1) \quad H(q_1, \dots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = h_0.$$

l'équation de Hamilton-Jacobi, où h_0 est une constante arbitraire

Posons

$$(2) \quad p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}$$

Dire que (1) est intégrable par séparation des variables,
ou que l'intégrale complète $W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a la forme

$$W(q_1, \dots, q_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n w_i(q_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

revient à écrire que

$$(3) \quad p_r = \frac{\partial W_r}{\partial q_r}$$

est une fonction de la seule variable q_r ou encore, que

$$(4) \quad \frac{\partial p_r}{\partial q_s} = 0 \quad (r \neq s)$$

Dérivons (1) par rapport à q_r en ayant égard à (4), il vient :

$$(5) \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial p_s}{\partial q_r} = \frac{\partial H}{\partial q_r} + \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{d p_r}{d q_r} = 0$$

D'où en supposant qu'aucune des quantités p_r ne manque dans H (ce qui correspond aux problèmes dynamiques) :

$$(6) \quad \frac{d p_r}{d q_r} = - \frac{\partial H}{\partial q_r} : \frac{\partial H}{\partial p_r}$$

2.- Pour qu'on puisse déterminer effectivement les fonctions p_r , dont seules les valeurs initiales restent arbitraires (et doivent le

rester si l'on veut que W soit une intégrale complète de (1), il faut que les conditions d'intégrabilité du système des équations (4) et (6) soient identiquement vérifiées. Or, on le voit aisément, ces conditions se réduisent à :

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial q_s} \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_r} : \frac{\partial H}{\partial p_r} \right\} = 0 \quad (s \neq r) \quad \text{ou}$$

$$(1) \quad \frac{\partial H}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial q_s} - \frac{\partial H}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_s} \\ \frac{\partial H}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial p_s} + \frac{\partial H}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial p_s} = 0 \quad (r \neq s)$$

Ce qui donne le *premier théorème de Lévi-Civita* :

“ La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $H(p_r, q_s) = h_0$ soit intégrable par séparation des variables est que la fonction H satisfasse aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles du second ordre (1). ”

3. - Si le problème dynamique est à liaisons indépendantes du temps on sait qu'on a :

$$(8) \quad H = K - U$$

où U est la fonction de forces et K ,

$$(9) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a^{(r,s)} p_r p_s$$

la forme adjointe de la force vive

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} a_{rs} q'_r q'_s$$

En remplaçant H dans (I) par son expression (8), on peut séparer les termes de degré quatre, de ceux de degré deux et de ceux de degré zéro, qui doivent être comme (I), vérifiés identiquement. Nous obtenons alors le système :

$$\frac{K}{p_r} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_s} - \frac{\partial K}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial q_s} - \frac{\partial H}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial K}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial p_s} \\ \frac{\partial K}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial K}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial p_s} = 0 \quad (r \neq s)$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial p_s} \\ + a^{(r,s)} \left[\frac{\partial K}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_s} + \frac{\partial K}{\partial q_s} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_r} \right] = 0 \quad (r \neq s)$$

$$a^{(r,s)} \frac{\partial U}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad (r \neq s)$$

qui est équivalent à (I).

En remarquant que (II) ne diffère de (I) qu'en ce que H est remplacé par K on a le *second théorème de Lévi-Civita* :

"Si un problème dynamique à liaisons indépendantes du temps et de fonction caractéristique $H=K+U$ est intégrable par séparation des variables, il en est de même de l'équation $K=h_0$ qui en définit les géodésiques."

4.- La formule (II_r) peut encore s'écrire : (10)

$$\frac{\partial K}{\partial p_r} \left[\frac{\partial K}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s} \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial p_s} \right] = \frac{\partial K}{\partial q_r} \left[\frac{\partial K}{\partial p_s} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_s \partial p_r} - \frac{\partial K}{\partial q_s} a^{(rs)} \right]$$

et l'on voit qu'on peut supposer deux cas , pour la variable q_r ,

suivant qu'au second membre $\frac{\partial K}{\partial q_r}$ est divisible par $\frac{\partial K}{\partial p_r}$

ou ne l'est pas. (8)

Dans son mémoire cité, Lévi-Civita s'occupe du cas où toutes les variables p_r sont telles que chaque $\frac{\partial K}{\partial q_i}$ est divisi-

ble par le $\frac{\partial K}{\partial p_r}$ correspondant . Nous appellerons ce cas :

cas de Lévi-Civita . La solution qu'il y donne peut s'exprimer ainsi : la force vive T est de la forme :

(8) Il nous paraît utile de mentionner ici , bien que nous ne fassions pas usage du fait que la distinction ci-dessus, faite par Dall'Acqua entre les deux genres d'indices est tout à fait suffisante et que la restriction que croit devoir introduire G. Prange dans la note p. de son article mentionné, de l'Encycopédie , n'est pas du tout nécessaire.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{r,s} \left[\sum_{i=1}^n X^{(i)}(q_r) X^{(i)}(q_s) \right] q'_r q'_s$$

où les $X^{(i)}(q_r)$ sont des fonctions arbitraires de la variable;

ou encore, T est une somme de carrés lorsqu'on l'exprime en fonction des coordonnées cartésiennes. Il vient pour la forme adjointe K , en posant:

$$\Delta = |a_{rs}| = \left| \sum_{i=1}^n X^{(i)}(q_r) X^{(i)}(q_s) \right|$$

et en désignant par Δ_{rs} le mineur de Δ correspondant

à a_{rs} :

$$(L) \quad K = \frac{1}{2} \sum_{r,s} (-1)^{r+s} \frac{\Delta_{rs}}{\Delta} p_r p_s$$

II. - Le cas essentiellement géodésique.

Dans ce qui suit nous nous plaçons dans l'hypothèse de Lévi - Civita

$$(11) \quad \frac{\partial K}{\partial q_r} = \frac{\partial K}{\partial p_r} L_r \quad (r = 1, \dots, n)$$

où nous posons :

$$(12) \quad L_r = \sum_{s=1}^n Q_{rs} p_s$$

L'ensemble des conditions (11) sera désigné par ; *conditions de divisibilité.*

Dans ces conditions les formules (II) du numéro 3 deviennent : la première :

$$\frac{\partial L_r}{\partial q_s} = \frac{\partial L_r}{\partial p_s} L_s \quad (r \neq s)$$

ou d'après (12) :

$$(13) \quad \frac{\partial Q_{rt}}{\partial q_s} = Q_{rs} \cdot Q_{st} \quad (r \neq s)$$

La seconde :

$$(14) \quad U''_{q_r q_s} - \frac{K'_{p_r}}{K'_{p_s}} Q_{rs} U'_{q_s} - \frac{K'_{p_s}}{K'_{p_r}} Q_{sr} U'_{q_r} = 0 \quad (r \neq s)$$

tandis que la troisième reste inchangée :

$$(15) \quad a^{(r,s)} \frac{\partial U}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad (r \neq s).$$

6.- Un problème dynamique à liaisons indépendantes du temps est dit (Dall'Acqua) *essentiellement géodésique* si, sous les conditions d'intégrabilité par séparation des variables, on ne peut associer à l'énergie cinétique K , comme potentiel séparable, que la fonction potentiel constante.

7.- Nous allons alors , démontrer le théorème suivant :

THEOREME 1 : “ *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème dynamique à liaisons indépendantes du temps soit essentiellement géodésique c'est qu'en plus des conditions de séparabilité et de divisibilité , on ait dans chaque colonne de la matrice des Q_{rs} , un élément au moins, non situé sur la diagonale principale , différent de zéro.* ”

8. - Démonstration.

Que la condition soit suffisante cela résulte du lemme suivant :

Lemme : “ Si U dépend réellement d'une variable q_r alors on a

$$Q_{sr} = 0 . ”$$

La formule (11) explicitée donne :

$$(16) \quad \frac{\partial a^{(r,s)}}{\partial q_t} = a^{(r,t)} Q_{t,s} + a^{(s,t)} Q_{t,r}$$

qui en particulier fournit :

$$(16') \quad \frac{\partial \alpha^{(r,s)}}{\partial q_r} = \alpha^{(r,r)} Q_{r,s} + \alpha^{(r,s)} Q_{r,r}$$

lorsqu'on y fait $t=r$.

Ou en permutant r et s :

$$(16'') \quad \frac{\partial \alpha^{(r,s)}}{\partial q_s} = \alpha^{(s,s)} Q_{s,r} + \alpha^{(r,s)} Q_{s,s}$$

Notre hypothèse, que l'on peut trouver pour chaque r un s différent de r tel que :

$$(17) \quad Q_{s,r} \neq 0$$

nous permet de conclure d'après (16''), grâce à (17) et au fait que $\alpha^{(r,r)}$ est toujours positif, que $\alpha^{(r,s)}$ est différent de zéro. Alors (15) nous donne :

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0 \quad (r \neq s) \quad ,$$

donc si $\frac{\partial U}{\partial q_r} \neq 0$ on a $\frac{\partial U}{\partial q_s} = 0$ et d'après (14) : $Q_{s,r} \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0$

d'où $Q_{s,r} = 0$.

De la contradiction l'on conclue toujours, pour tout r :

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 .$$

6.- La condition est nécessaire Il nous faut en ce point prouver deux choses : d'abord, que si l'on a (11), sans que dans chaque colonne de la matrice des Q_{rs} un au moins des éléments non situés sur la diagonale principale soit non - nul, alors on peut trouver un potentiel séparable par rapport à K , non constant. Ensuite, que les conditions (11) sont elles-mêmes nécessaires,

10. - Supposons donc que, par exemple, tous les termes de la première colonne de Q_{rs} , sauf Q_{11} , soient nuls.

On peut alors satisfaire aux équations que doit vérifier le potentiel, à savoir (14), (15) en prenant :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} \neq 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \quad (r > 1) .$$

Ce qui prouve que la fonction arbitraire $U(q_1)$ peut

être associée comme potentiel séparable à l'énergie cinétique K , qui satisfait aux conditions de divisibilité.

11.— Pour démontrer que les conditions (11) sont nécessaires, nous allons reprendre un raisonnement de Dall'Acqua en en changeant quelques détails seulement.

D'après (10), si pour un indice, m par exemple, on n'a pas

$$\frac{\partial K}{\partial q_m} = \frac{\partial K}{\partial p_m} L_m$$

on doit avoir :

$$(18) \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial p_m} \cdot \frac{\partial n}{\partial p_r} - \frac{\partial K}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial p_m} = \frac{\partial K}{\partial p_m} M_{m,r} \quad (m \neq r,$$

où les fonctions M_{mr} sont des formes linéaires et homogènes en les p , qu'on peut déterminer ainsi : dérivons (18) deux fois par rapport à p_m et éliminons entre les deux équations obtenues

$$\frac{\partial M_{mr}}{\partial p_m}, \text{ il vient:}$$

$$(19) \quad M_{m,r} = \frac{1}{2 a^{(m,m)^2}} \cdot \frac{\partial a^{(m,n)}}{\partial q_r} \left[2 a^{(m,n)} \frac{\partial K}{\partial p_r} - a^{(m,r)} \frac{\partial K}{\partial p_m} \right]$$

De même on obtient de (II₁) eu égard à (18)

$$(20) \quad \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_m} \cdot \frac{\partial K}{\partial p_r} - \frac{\partial K}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_m \partial p_r} = \frac{\partial K}{\partial q_m} M_{m,r} \quad (m \neq r)$$

Multiplions (18) par $\frac{\partial U}{\partial q_m}$ et utilisons (II₂) on obtient :

$$(21) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial p_m} \frac{\partial K}{\partial p_r} - \frac{\partial U}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_m \partial p_r} - \frac{\partial U}{\partial q_m} M_{m,r} = 0 \quad (m \neq r)$$

Dérivons (18) par rapport à q_m et (20) par rapport à p_m

et éliminons les dérivées du troisième ordre, il vient :

$$(22) \quad \frac{\partial K}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial M_{mr}}{\partial q_m} + 2 \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial p_m} \cdot \frac{\partial^2 K}{\partial q_m \partial p_r} - 2 \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_m} a^{(m,r)} =$$

$$\frac{\partial K}{\partial p_m} \cdot \frac{\partial M_{mr}}{\partial q_m}, \quad (m \neq r)$$

Si maintenant on tire de (18), (20), (19), les expressions de

$\frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_m}, \frac{\partial^2 K}{\partial p_m \partial q_r}, M_{mr}$ et de $\frac{\partial M_{mr}}{\partial p_m}$ et que nous les portions

dans (22), tous les termes obtenus ont en facteur $\frac{\partial K}{\partial p_m}$

sauf le terme $\frac{3}{2} \frac{\partial K}{\partial q_m} \cdot \frac{a^{(m,r)}}{a^{(m,m)}} \cdot \frac{\partial a^{(m,m)}}{\partial q_r}$.

Le premier membre de (22) doit, comme le second, être

divisible par $\frac{\partial K}{\partial p_m}$ et par hypothèse, le seul terme de l'expres-

sion ci-dessus, qui contienne des p ne l'est pas, on doit donc avoir :

$$(23) \quad a^{(m,r)} \frac{\partial a^{(m,m)}}{\partial q_r} = 0 \quad (r \neq m)$$

Il en résulte pour M_{mr} :

$$(19) \quad M_{m,r} = \frac{\partial K}{\partial p_r} \cdot \frac{\partial \text{Log } a^{(m,m)}}{\partial q_r}$$

et en revenant à (18) on en conclue puisque le second membre est divisible par $\frac{\partial K}{\partial p_r}$ et que le premier l'est aussi,

que $a^{(m,s)} \frac{\partial K}{\partial q_r}$ doit : ou être divisible par $\frac{\partial K}{\partial p_r}$ ou

être nul. Considérons ces deux cas séparément :

A) On a :

$$\frac{\partial K}{\partial q_r} = \frac{\partial K}{\partial p_r} L_r$$

Si $a^{(m,r)}$ est différent de zéro, l'équation (23) donne :

$$\frac{\partial a^{(m,m)}}{\partial q_r} = 0$$

d'où :

$$Q_{rm} = 0$$

On satisfera alors à (II₂) et à (15) en prenant :

$$\frac{\partial U}{\partial q_m} \neq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \quad (m \neq r) \quad .$$

Si $\alpha^{(m,r)} = 0$ la formule (16) appliquée à l'indice m montre que l'on a encore

$$\frac{\partial \alpha^{(m,m)}}{\partial q_r} = 0 \cdot$$

d'où :

$$Q_{rm} = 0.$$

On satisfait à (II₂) et à (15) en prenant encore

$$\frac{\partial U}{\partial q_m} \neq 0 \quad \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0 \quad (m \neq r) \quad .$$

B). Si $\alpha^{(mr)} \frac{\partial K}{\partial q_r}$ est nul, on a :

$$\alpha^{(mr)} = 0$$

(18) fournit alors :

$$\frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial p_m} = \frac{\partial K}{\partial p_r} \frac{\partial \text{Log } a^{(r,r)}}{\partial q_m} \quad (m \neq r)$$

et d'après (19') les formules (20) et (21) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} (20') \quad & \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_m} - \frac{\partial K}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \text{Log } a^{(r,r)}}{\partial q_m} - \frac{\partial K}{\partial q_m} \frac{\partial \text{Log } a^{(m,m)}}{\partial q_r} = 0 \\ (21') \quad & \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_m} - \frac{\partial U}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \text{Log } a^{(r,r)}}{\partial q_m} - \frac{\partial U}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial \text{Log } a^{(m,m)}}{\partial q_r} = 0 \end{aligned} \right\} m \neq r$$

Dérivons deux fois (20') par rapport à p_m on obtient :

$$\frac{\partial^2 a^{(m,m)}}{\partial q_r \partial q_m} \cdot \frac{\partial a^{(m,m)}}{\partial q_r} \cdot \frac{\partial \text{Log } a^{(r,r)}}{\partial q_m} \cdot \frac{\partial a^{(m,m)}}{\partial q_m} \frac{\partial \text{Log } a^{(m,m)}}{\partial q_r} = 0$$

Ce qui prouve que si l'on prend pour potentiel séparable par rapport à K la fonction :

$$U = a^{(mm)} = \text{constante}$$

on satisfait à toutes les conditions auxquelles doit satisfaire U .

Nous avons ainsi bien montré que, si (11) n'est pas satisfaite pour un seul indice, alors, on peut trouver un potentiel séparable non constant.

III.— Les cas où il existe un potentiel séparable.

12.- Nous venons de voir que, si les éléments de toute une colonne de (Q_{rs}) , par exemple la m^e , sont nuls, alors, il existe un potentiel $\bigcup [q_m]$ séparable par rapport à K .

Si maintenant, on suppose que, par exemple, tous les éléments des m premières colonnes de (Q_{rs}) , sauf les éléments situés sur la diagonale principale sont nuls, on ne peut conclure que le potentiel, dépendant effectivement de toutes les variables $q_1, \dots, q_m$ soit possible. Il faudrait, pour cela, que les $\alpha^{(rs)}$, pour $r \neq s$ et prenant les valeurs de 1 à m , fussent nuls. Or, nous allons voir que ceci n'est pas une conséquence de l'annulation des Q_{rs} en question. Ce qu'on peut dire, pour

le moment , c'est qu'on peut prendre pour potentiel séparable une fonction arbitraire de l'une quelconque des variables $q_1, \dots, q_m$.

13.- Nous allons maintenant , rechercher quelles sont les renseignements que nous pouvons avoir sur les $\alpha^{(r,s)}$ lorsque nous faisons l'hypothèse que les Q_{rs} (pour $r \neq s, = 1, \dots, m,$) sont nuls.

On peut, en désignant par α un indice général allant de 1 à n , par β un indice allant de 1 à m (nous appellerons *variables libres* les variables dont les indices sont des β et qui peuvent entrer dans le potentiel), par γ un indice allant de $m+1$ à n , écrire notre hypothèse : $Q_{\alpha\beta} = 0$ sous la forme :

$$(24) \quad Q_{\beta\beta} = 0 \quad (\beta' \neq \beta) \quad Q_{\gamma\beta} = 0$$

les équations (13) nous donnent alors :

$$\frac{\partial Q_{\beta\beta}}{\partial q_{\beta'}} = 0 \quad \frac{\partial Q_{\beta\beta}}{\partial q_{\gamma}} = 0$$

ou puisque $Q_{\beta\beta}$ n'est pas nul:

$$(25) \quad Q_{\beta\beta} = \frac{f_{\beta'}}{f_{\beta}}$$

(f_x signifie $f(q_x)$)

Les mêmes formulés donnent encore :

$$(26) \quad \frac{\partial Q_{\beta\gamma}}{\partial q_{\beta_1}} = 0 \quad (\beta' \neq \beta) \quad \frac{\partial Q_{\beta\gamma}}{\partial q_{\gamma_1}} = Q_{\beta\gamma_1} Q_{\gamma_1\gamma}$$

$$(27) \quad \frac{\partial Q_{\gamma\gamma_1}}{\partial q_{\beta}} = 0 \quad \frac{\partial Q_{\gamma\gamma_1}}{\partial q_{\gamma'}} = Q_{\gamma\gamma'} Q_{\gamma'\gamma_1} \quad (\gamma' \neq \gamma)$$

On tire alors des formules (16):

$$\frac{\partial a^{(\beta\beta)}}{\partial q_{\beta_1}} = \frac{\partial a^{(\beta\beta)}}{\partial q_{\gamma}} = 0$$

$$\frac{\partial \log a^{(\beta\beta)}}{\partial q_{\beta}} = 2 Q_{\beta\beta}$$

D'où en changeant un peu les notations :

$$(28) \quad \alpha^{(\beta \beta)} = f_{\beta}^2$$

De même :

$$\frac{\partial \alpha^{(\beta \beta')}}{\partial q_{\beta''}} = 0 \quad (\beta'' \neq \beta \beta') \quad \frac{\partial \alpha^{(\beta \beta')}}{\partial q_{\gamma}} = 0$$

$$\frac{\partial \text{Log} \alpha^{(\beta, \beta')}}{\partial q_{\beta}} = Q_{\beta \beta} \quad \frac{\partial \text{Log} \alpha^{(\beta, \beta')}}{\partial q_{\beta'}} = Q_{\beta' \beta'}$$

D'où :

$$(29) \quad \alpha^{(\beta \beta')} = c_{\beta \beta'} \times f_{\beta}^2 \cdot f_{\beta'}^2 \quad (c_{\beta \beta'} = \text{CONST})$$

Enfin on tire, toujours de (16):

$$(30) \quad \frac{\partial \alpha^{(\beta \gamma)}}{\partial q_{\beta'}} = \alpha^{(\beta, \beta')} Q_{\beta' \gamma} \quad \frac{\partial \alpha^{(\beta \gamma)}}{\partial q_{\gamma_1}} = \alpha^{(\beta \gamma_1)} Q_{\gamma_1 \gamma}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(\beta \gamma)}}{\partial q_{\beta}} = \alpha^{(\beta \gamma)} Q_{\beta \beta} + \alpha^{(\beta \beta)} Q_{\beta \gamma}$$

et

$$(31) \quad \frac{\partial \alpha^{(\gamma \gamma_1)}}{\partial q_{\beta}} = \alpha^{(\beta \gamma)} Q_{\beta \gamma_1} + \alpha^{(\beta \gamma_1)} Q_{\beta \gamma}$$

$$\frac{\partial \alpha^{(\gamma \gamma_1)}}{\partial q_{\gamma_2}} = \alpha^{(\gamma_2 \gamma_1)} Q_{\gamma_2 \gamma} + \alpha^{(\gamma \gamma_2)} Q_{\gamma_2 \gamma_1}$$

14.- Inversement des formules (28) , combinées à (16) , on conclue que les quantités Q_{rs} , pour $r \neq s$. ($r = 1, 2 \dots m$; $s = 1, 2 \dots n$) sont toutes nulles , de sorte que nous pouvons énoncer le théorème suivant , qui constitue un *critère* très simple pour distinguer les cas essentiellement géodésiques :

THEOREME II. " *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un problème dynamique à liaisons independantes du temps soit essentiellement géodésique c'est qu'en plus des conditions (11), K vérifie la condition qu'aucun des coefficients de ses termes carrés ne soit fonction de la seule variable de l'indice correspondant , ni soit constant.* "

15.- Ce critère pourrait naturellement être démontré directement sans passer par l'intermédiaire du théorème II. Il suffirait de répéter les démonstrations données aux numéros 8 et 10 eu égard à la

formule (16). On tire en effet , tout d'abord de cette formule et de notre hypothèse, que l'un au moins des (Q_{rs}) est différent de zéro et d'après (14) et (15) la condition est suffisante. Sa nécessité apparaît évidente d'après ce que nous avons dit au numéro précédent.

16.- Pour représenter explicitement la fonction K , satisfaisant aux conditions (11) et telles qu'on puisse lui associer un potentiel séparable dépendant de l'une des variables ci-dessus, il faudrait discuter complètement le système formé par les équations (30) et (31) . Nos efforts jusqu'à ce jour ne nous ont pas permis d'aboutir à des résultats suffisants pour qu'il y eut intérêt à les présenter ici.

17.- Nous allons, maintenant, rechercher la forme que peut avoir le potentiel séparable par rapport à K , lorsqu'on suppose que les variables libres peuvent toutes , apparaître dans U . Il est évident d'après (15) que , si tel est le cas, les coefficients $a^{(rs)}$ (pour r, s variables libres) sont tous nuls ; nous

avons alors le théorème suivant.

THEOREME III. *"Supposons que K remplisse les conditions de divisibilité et de séparabilité. Soit donné un groupe de variables libres, qu'on peut supposer être $q_1, \dots, q_m$ (après une permutation convenable des indices). La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse associer à K, un potentiel séparable dépendant effectivement de toutes ces variables, est, que la partie de K ne contenant que les moments $p_1, \dots, p_m$, se réduise à une somme de carrés.*

Si cette condition est remplie, chaque somme de fonctions arbitraires dépendant chacune d'une seule des variables du groupe, peut être associée à K comme potentiel séparable et chaque potentiel séparable dépendant seulement des variables du groupe peut être représenté par une telle somme "

18.— Nous avons déjà montré ci-dessus que la condition de l'énoncé était nécessaire ; elle est également suffisante car si les $\alpha^{(r,s)}$ pour r, s allant de 1 à m , sont nuls, on tire de (16) :

$$\alpha^{(r,r)} Q_{sr} = 0 \quad \alpha^{(s,s)} Q_{rs} = 0 \quad [r \neq s]$$

mais les $\alpha^{(r,r)}$ sont toujours positifs de sorte qu'on a

$$Q_{rs} = 0 \quad Q_{sr} = 0 \quad (r \neq s)$$

L'équation (14) se réduit à :

$$(32) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_r \partial q_s} = 0$$

dont la solution la plus générale est :

$$(33) \quad U(q_1, q_2, \dots, q_m) = \sum_{i=1}^m U_i(q_i)$$

où les fonctions U_i sont absolument arbitraires, et, comme le système (15) est toujours vérifié pour les indices allant de 1 à m , la condition est nécessaire ; de plus, le potentiel a la forme qu'exige la seconde partie de l'énoncé.

D'après (32) on voit que toute somme de la forme (33) peut être prise pour potentiel séparable, Notre théorème est donc complètement démontré.

CURRICULUM VITAE

Caleb Gattegno Benghiat, ressortissant espagnol, fils de feu Menahem Gattegno Mayo et de Fortunée née Benghiat. Je suis né à Alexandrie (Egypte) en 1911. j'ai fait mes études en français à Alexandrie, de 1914 à 1918, dans des écoles privées et de 1919 à 1929 au lycée de la Mission Laïque Française. En Juin 1929 je passe mon baccalauréat (série mathématique-sciences-langues vivantes). De 1929 à 1932, répétiteur au lycée d'Alexandrie; en même temps je prépare seul mes examens de licence que par une autorisation spéciale de la Faculté des Sciences de Marseille, je peux passer sans avoir suivi de cours. J'obtiens successivement les certificats d'études supérieures suivants : C. E. S. de Mathématiques Générales (Novembre 1930), C. E. S. de Chimie Générale (juin 1931), C. E. S. de physique Générale (Novembre 1931), C. E. S. de Mécanique Rationnelle (Juin 1932). Les trois premiers certificats me donnent le titre de licencié ès Sciences de l'enseignement secondaire et dès Octobre 1932, j'occupe le poste de professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée d'Alexandrie,

En Novembre 1936 je prends un congé d'une année pour travailler en Europe en vue du Doctorat. J'avais été dirigé, par correspondance, par MM. les Professeurs Pérès, Dive, Bouligand, de 1932 à 1936. En Novembre 1936, j'obtiens à Marseille le Diplôme d'Etudes Supérieures de Sciences Mathématiques. J'arrive à Bâle en Novembre 1936, chez Monsieur le Professeur Ostrowski qui consent à diriger mes recherches, C'est grâce à lui que j'ai pu réaliser le présent travail en même temps que je suivais ses cours des semestres d'hiver 36-37 et d'été 37. Nos contacts fréquents m'ont permis de réaliser de grands progrès dans mon éducation mathématique, je lui en exprime ici mes plus vifs remerciements.
